第 1 章　命题逻辑的基本概念

命题逻辑研究的是命题的推理演算. 这一章介绍命题逻辑的基本概念, 包括引入命题联结词, 讨论合式公式、重言式以及自然语句的形式化等内容.

1.1　命　　题

1.1.1　什么是命题

命题是一个非真即假(不可兼)的陈述句. 有两层意思, 首先命题是一个陈述句, 而命令句、疑问句和感叹句都不是命题. 其次是说这个陈述句所表达的内容可决定是真还是假, 而且不是真的就是假的, 不能不真又不假, 也不能又真又假. 凡与事实相符的陈述句为真语句, 而与事实不符的陈述句为假语句. 这说是说, 一个命题具有两种可能的取值(又称真值), 为真或为假, 并且只能取其一. 通常用大写字母 T 表示真值为真, 用 F 表示真值为假, 有时也可分别用 1 和 0 表示它们. 因为只有两种取值, 所以这样的命题逻辑称为二值逻辑.

举例说明命题概念:

(1)“雪是白的”. 是一个陈述句, 可决定真值, 显然其真值为真, 或说为 T, 所以是一个命题.

(2)“雪是黑的”. 是一个陈述句, 可决定真值, 显然其真值为假, 或说为 F, 所以是一个命题.

(3)“好大的雪啊!”不是陈述句, 不是命题.

(4)“一个偶数可表示成两个素数之和”(哥德巴赫猜想). 是命题, 或为真或为假, 只不过当今尚不知其是真命题还是假命题.

(5)“1+ 101= 110”. 这是一个数学表达式, 相当于一个陈述句, 可以叙述为“1 加 101 等于 110”, 这个句子所表达的内容在十进制范围中真值为假, 而在二进制范围中真值为真. 可见, 这个命题的真值与所讨论问题的范围有关.

1.1.2　命题变项

为了对命题作逻辑演算, 采用数学手法将命题符号化(形式化)是十分重要的. 我们约定用大写字母表示命题, 如以 P 表示“雪是白的”, Q 表示“北京是中国的首都”等. 当 P 表示任一命题时, P 就称为命题变项(变元).

命题与命题变项含义是不同的, 命题指具体的陈述句, 是有确定的真值, 而命题变项的真值不定, 只当将某个具体命题代入命题变项时, 命题变项化为命题, 方可确定其真值. 命题与命题变项像初等数学中常量与变量的关系一样. 如 5 是一个常量, 是一个确定的数字, 而 x 是一个变量, 赋给它一个什么值它就代表什么值, 即 x 的值是不定的. 初等数学的运算规

则中对常量与变量的处理原则是相同的, 同样, 在命题逻辑的演算中对命题与命题变项的处理原则也是相同的. 因此, 除在概念上要区分命题与命题变项外, 在逻辑演算中就不再区分它们了.

1.1.3 简单命题和复合命题

简单命题又称原子命题, 它是不包含任何的与、或、非一类联结词的命题. 如 1.1.1 中所举的命题例子都是简单命题. 这样的命题不可再分割, 如再分割就不是命题了. 而像命题“雪是白的而且 1 + 1 = 2”, 就不是简单命题, 它可以分割为“雪是白的”以及“1+ 1= 2”两个简单命题, 联结词是“而且”. 在简单命题中, 尽管常有主语和谓语, 但我们不去加以分割, 是将简单命题作为一个不可分的整体来看待, 进而作命题演算. 在谓词逻辑里, 才对命题中的主谓结构进行深入分析.

把一个或几个简单命题用联结词(如与、或、非) 联结所构成的新的命题称为复合命题, 也称为分子命题. 复合命题自然也是陈述句, 其真值依赖于构成该复合命题的各简单命题的真值以及联结词, 从而复合命题有确定的真值. 如“张三学英语和李四学日语”就是一个复合命题, 由简单命题“张三学英语”“李四学日语”经联结词“和”联结而成, 这两个简单命题真值均为真时, 该复合命题方为真. 如果只限于简单命题的讨论, 则除讨论真值外, 再没有可研究的内容了. 而命题逻辑所讨论的正是多个命题联结而成的复合命题的规律性.

在数理逻辑里, 仅仅把命题看成是一个可取真或可取假的陈述句, 所关心的并不是这些具体的陈述句的真值究竟为什么或在什么环境下是真还是假, 这是有关学科本身研究的问题, 而逻辑关心的仅是命题可以被赋予真或假这样的可能性, 以及规定了真值后怎样与其他命题发生联系.

1.2 命题联结词及真值表

联结词可将命题联结起来构成复杂的命题, 命题逻辑联结词的引入是十分重要的, 其作用相当于初等数学里在实数集上定义的+、-、×、÷ 等运算符. 通过联结词便可定义新的命题, 从而使命题逻辑的内容变得丰富起来, 我们要讨论的仅只是复合命题的真值, 此值可由组成它的简单命题的真值所确定. 值得注意的是逻辑联结词与日常自然用语中的有关联结词的共同点和不同点.

下面介绍五个常用的逻辑联结词:

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$

1.2.1 否定词 $\neg$

否定词“$\neg$”是个一元联结词, 亦称否定符号. 一个命题 P 加上否定词就形成了一个新的命题, 记作$\neg P$, 这个新命题是命题的否定, 读作非 P.

否定词的真值规定如下: 若命题 P 的真值为真, 那么 $\neg P$ 的真值就为假; 若 P 的真值为假, 那么$\neg P$ 的真值就为真. $\neg P$ 与 P 间的真值关系, 常常使用称作真值表的一种表格来表

示,如图 1.2.1 所示.

也可将图 1.2.1 看作是对$\neg P$ 的定义.它表明了$\neg P$ 的真值如何依赖于 P 的真值.真值表描述了命题之间的真值关系,很直观,当命题变项的个数不多时,也很容易建立,真值表是命题逻辑里研究真值关系的重要工具.

P	$\neg$P
T	F
F	T

或

P	$\neg$P
1	0
0	1

图 1.2.1

例 1 “昨天张三去看球赛了”.该命题以 P 表示,于是“昨天张三没有去看球赛”,该新命题便可用$\neg P$ 表示.

若昨天张三去看球赛了,命题 P 是真的,那么新命题$\neg P$ 必然是假的.反之,若命题 P 是假的,那么$\neg P$ 就是真的.这符合图 1.2.1的描述.

例 2 Q: 今天是星期三.

$\neg Q$: 今天不是星期三.

然而$\neg Q$ 不能理解为“今天是星期四”,因为“今天是星期三”的否定,并不一定必是星期四,还可能是星期五、星期六……在这种情况下,要注意否定词的含义是否定被否定命题的全部,而不是一部分.

1.2.2 合取词$\wedge$

合取词“$\wedge$”是个二元命题联结词,亦称合取符号.将两个命题 P, Q 联结起来,构成一个新的命题 $P \wedge Q$,读作 P, Q 的合取,也可读作 P 与 Q.这个新命题的真值与构成它的命题 P, Q 的真值间的关系,由合取词真值表来规定如图 1.2.2.

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

图 1.2.2

图 1.2.2 指出,只有当两个命题变项 $P = T$,$Q = T$ 时方有 $P \wedge Q = T$,而 P, Q 只要有一为 F,则 $P \wedge Q = F$.这样看来,$P \wedge Q$可用来表示日常用语 P 与 Q,或 P 并且 Q.

例 3 P: 教室里有 10 名女同学.

Q: 教室里有 15 名男同学.

不难看出,命题“教室里有 10 名女同学与 15 名男同学”,便可由 $P \wedge Q$ 来描述了.

例 4 A: 今天下雨了.

B: 教室里有 100 张桌子.

可知 $A \wedge B$ 就是命题“今天下雨了并且教室里有 100 张桌子”.

P, Q, A, B 都是简单命题,通过合取词$\wedge$,得到了复合命题 $P \wedge Q$,$A \wedge B$.复合命题通过$\wedge$还可得到复合命题的复合命题.

日常自然用语里的联结词“和”、“与”、“并且”,一般是表示两种同类有关事物的并列关系(如例 3).而在逻辑语言中仅考虑命题与命题之间的形式关系或说是逻辑内容,并不顾及日常自然用语中是否有此说法.这样,“$\wedge$”同“与”、“并且”又不能等同视之.例 4 在日常自然用语中是不会出现的语句,因 A,B 毫无联系,然而在数理逻辑中 $A \wedge B$ 是可以讨论的.

日常自然用语中说,“这台机器质量很好,但是很贵”,这句话的含义是说同一台机器质量很好而且很贵.若用 P 表示“这台机器质量很好”,用 Q 表示“这台机器很贵”,那么这句话的逻辑表示就是 $P \wedge Q$,尽管这句话里出现的联结词是“但是”.总之,合取词有“与”、“并且”的含义,逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象,两者并不等同,这是需注意的.

1.2.3　析取词∨

析取词“∨”是个二元命题联结词，亦称析取符号. 将两个命题 P，Q 联结起来，构成一个新的命题 P∨Q，读作 P，Q 的析取，也读作 P 或 Q. 这个新命题的真值与构成它的命题 P，Q 的真值间的关系，由析取词真值表来规定，如图 1.2.3 所示.

P	Q	P∨Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

图　1.2.3

图 1.2.3 指出，当 P，Q 有一取值为 T 时，P∨Q 便为 T. 仅当 P，Q 均取 F 值时，P∨Q 方为 F. 这就是析取词的定义，P∨Q 可用来表示自然用语 P 或 Q.

例 5　P：今天刮风.

Q：今天下雨.

命题“今天刮风或者下雨”便可由 P∨Q 来描述了.

例 6　A：2 小于 3.

B：雪是黑的.

A∨B 就是命题“2 小于 3 或者雪是黑的”. 由于 2 小于 3 是真的，所以 A∨B 必取值为真，尽管“雪是黑的”这命题取假.

同样需注意析取词同“或”的异同.

1.2.4　蕴涵词→

蕴涵词“→”也是个二元命题联结词，亦称推断符号. 将两个命题 P，Q 联结起来，构成一个新的命题 P→Q，读作如果 P 则 Q，或读作 P 蕴涵 Q，如果 P 那么 Q，其中 P 称前件(前项、条件)，Q 称后件(后项、结论).

规定只有当 P 为 T 而 Q 为 F 时，P→Q = F. 而 P = F、Q 任意，或 P = T、Q = T 时，P→Q 均取值为 T. 真值表见图 1.2.4.

引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系. 实际上，图 1.2.4 说明了：

P	Q	P→Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图　1.2.4

P→Q = T 下，若 P = T 必有 Q = T，而不会出现 Q= F，这表明 P→Q 体现了 P 是 Q 成立的充分条件.

P→Q = T 下，若 P = F 可有 Q = T，这表明 P→Q 体现了 P 不必是 Q 成立的必要条件.

使用 P→Q 能描述推理. 即 P→Q 为真时，只要 P 为真必有 Q 真，而不能出现 P 真而 Q 假就够了. 至于 P 为假时，Q 取真取假，并不违背 P 为真时 Q 必真. 从而仍可规定 P 为假时，P→Q 取真. 这当然只是对 P→Q 的一种说明，而从逻辑上说，本可按真值表定义 P→Q，可不必涉及具体含义. 另外，当 P = F 时对 P→Q 真值的不同定义方式将给推理的讨论带来不同的表示形式，也是允许的.

图 1.2.5 是 ¬P∨Q 的真值表，显然图 1.2.4 同 1.2.5 是相同的，在 P，Q 的所有取值下，P→Q 同 ¬P∨Q 都有相同的真值，于是可记作

$$P\to Q = \neg P\vee Q(\text{真值相同的等值命题以等号联结})$$

这也说明→可由 ¬, ∨来表示, 从逻辑上看"如果 P 则 Q"同"非 P 或 Q"是等同的两个命题.

P	Q	¬P∨Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图 1.2.5

蕴涵词→与自然用语"如果……那么……"有一致的一面, 可表示因果关系. 然而 P, Q 是无关的命题时, 逻辑上允许讨论 $P\to Q$. 并且 $P = F$ 则 $P\to Q = T$, 这在自然用语中是不大使用的.

例 7 P: $n > 3$ (n 为整数)

Q: $n^2 > 9$

命题 $P\to Q$ 表示"如果 $n > 3$ 那么 $n^2 > 9$", 分析 $P\to Q$ 的真值.

(1) $P = Q = T$. 例如, $n = 4 > 3$, 有 $n^2 = 16 > 9$, 这符合事实 $P\to Q = T$, 正是我们所期望的可用 $P\to Q$ 表示 P, Q 间的因果关系, 这时规定 $P\to Q = T$ 是自然的.

(2) $P = T$, $Q = F$. 例如, $n > 3$ 而 $n^2 < 9$ 这是不会成立的, 也可用 $P\to Q$ 表示 P, Q 间的因果关系是不成立的, 自然规定 $P\to Q = F$.

(3) $P = F$ 而 $Q = F$ 或 T. 例如,

$$n = 2 < 3 \quad 有 \ n^2 = 4 < 9$$

$$n = -4 < 3 \quad 有 \ n^2 = 16 > 9$$

由于前提条件 $n > 3$ 不成立, 而 $n^2 > 9$ 成立与否并不重要, 都不违反对自然用语"如果 $n > 3$ 那么 $n^2 > 9$"成立的肯定. 于是 $P = F$ 时可规定 $P\to Q = T$. 当然在肯定了(1), (2)的情况下, 对 $P = F$ 时 $P\to Q$ 的值另作规定也是可以的, 同样不违反自然语句"如果……那么……"可以用 $P\to Q$ 来描述. 总之, 对 $P\to Q$ 的这种说明是可接受的, 但也不是说只有这样的解释才是合理的.

例 8 P: $2 + 2 = 5$

Q: 雪是黑的

$P\to Q$ 就是命题"如果 $2 + 2 = 5$, 那么雪是黑的". 从蕴涵词的定义看, 由于 $2 + 2 = 5$ 是不成立的或说 P 取 F 值, 不管 Q 取真取假都有 $P\to Q = T$.

联结词→, 较 ¬、∨、∧难于理解, 然而它在逻辑中用于表示因果关系, 因而又是最有用的.

1.2.5 双条件词↔

双条件词"↔"同样是个二元命题联结词, 亦称等价符号. 将两个命题 P, Q 联结起来构成新命题 $P\leftrightarrow Q$, 读作 P 当且仅当 Q, 或读作 P 等价于 Q. 这个新命题的真值与 P, Q 真值间的关系, 由双条件词的真值表来规定, 如图 1.2.6 所示.

P	Q	P↔Q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

图 1.2.6

图 1.2.6 指出, 只有当两个命题 P, Q 的真值相同或说 $P = Q$ 时, $P\leftrightarrow Q$ 的真值方为 T. 而当 P, Q 的真值不同时, $P\leftrightarrow Q = F$.

若建立 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 的真值表, 就可发现 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 和 $P\leftrightarrow Q$ 有相同的真值, 于是

$$(P\to Q)\wedge(Q\to P) = P\leftrightarrow Q$$

例 9 P: △ABC 是等腰三角形

Q: △ABC 中有两个角相等

命题 $P \leftrightarrow Q$ 就是“△ABC 是等腰三角形当且仅当△ABC 中有两个角相等”. 显然就这个例子而言 $P \leftrightarrow Q = T$.

1.2.6 总结

由五个联结词所定义的运算是数理逻辑中最基本、最常用的逻辑运算. 一元二元联结词还有多个, 此外还有三元以至多元的联结词, 因其极少使用, 况且又都可由这五个基本联结词表示出来, 所以无需一一定义了.

联结词是由命题定义新命题的基本方法.

命题逻辑的许多问题都可化成是计算复合命题的真假值问题, 真值表方法是极为有力的工具, 是应十分重视和经常使用的.

由联结词构成新命题的真值表中, 对仅由两个变元 P, Q 构成的新命题 A 而言, 每个变元有 T, F 两种取值, 从而 P, Q 共有四种可能的取值, 对应于真值表中的四行, 每一行下命题 A 都有确定的真值. 对 P, Q 的每组真值组合(如 $P = T$, $Q = F$) 或说真值指派, 都称作命题 A 的一个解释. 一般地说, 当命题 A 依赖于命题 $P_1, \cdots, P_n$ 时, 则由 $P_1, \cdots, P_n$ 到 A 的真值表就有 2^n 行, 每一行对应着 $P_1, \cdots, P_n$ 的一组真值, 在这组真值下, A 的真值随之而定, $P_1, \cdots, P_n$ 的每组真值都称作命题 A 的一个解释. A 有 2^n 个解释, 命题的解释用符号 I 表示.

由于数理逻辑是采用数学的符号化的方法来研究命题间最一般的真值规律的, 而不涉及判断一个命题本身如何取真取假, 不顾命题的具体含义, 而是抽象地、形式地讨论逻辑关系, 这就导致了数理逻辑中所讨论的命题与自然用语的差异.

联结词 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的. 从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具. 也正是数理逻辑应用于实际, 特别是应用于计算机学科推动了其自身的发展.

1.3 合式公式

命题公式是命题逻辑讨论的对象, 而由命题变项使用联结词可构成任意多的复合命题, 如 $\neg P \wedge Q$, $P \wedge Q \vee R$, $P \rightarrow \neg Q$ 等. 它们是否都有意义呢? 只有一个联结词的命题 $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ 当然是有意义的. 由两个联结词构成的命题 $P \wedge Q \vee R$ 至少意义不明确, 是先作 $P \wedge Q$ 再对 R 作 $\vee$, 还是先作 $Q \vee R$ 再对 P 作 $\wedge$ 呢? $\neg P \wedge Q$ 也有同样的问题. 解决运算次序是容易的, 可像初等代数那样使用括号的办法, 在逻辑运算中也常使用圆括号来区分运算的先后次序. 这样由命题变项、命题联结词和圆括号便组成了命题逻辑的全部符号. 进一步的问题是建立一般的原则以便生成所有的合法的命题公式, 并能识别什么样的符号串是合法的(有意义的)?

合式公式(简记为 Wff)的定义:

(1) 简单命题是合式公式.

(2) 如果 A 是合式公式, 那么 $\neg A$ 也是合式公式.

(3) 如果 A, B 是合式公式, 那么 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 是合式公式.

(4) 当且仅当经过有限次地使用(1),(2),(3)所组成的符号串才是合式公式.

这个定义给出了建立合式公式的一般原则,也给出了识别一个符号串是否是合式公式的原则.

这是递归(归纳)的定义.在定义中使用了所要定义的概念,如在(2)和(3)中都出现了所要定义的合式公式字样;其次是定义中规定了初始情形,如(1)中指明了已知的简单命题是合式公式.

条件(4)说明了哪些不是合式公式,而(1),(2),(3)说明不了这一点.

依定义,若判断一个公式是否为合式公式,必然要层层解脱回归到简单命题方可判定.

$\neg(P\wedge Q)$,$(P\rightarrow(P\wedge Q))$,$(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$都是合式公式.而$P\vee\neg Q\vee$,$((P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q))$,$(P\rightarrow Q$都不是合式公式,因为没有意义,我们不讨论.

在实际使用中,为了减少圆括号的数量,可以引入一些约定,如规定联结词优先级的办法,可按$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$的排列次序安排优先的级别,多个同一联结词按从左到右的优先次序.这样,在书写合式公式时,可以省去部分或全部圆括号.通常采用省略一部分又保留一部分括号的办法,这样选择就给公式的阅读带来方便.如

$(P\rightarrow(Q\vee R))$可写成$P\rightarrow(Q\vee R)$或$P\rightarrow Q\vee R$.

$(P\rightarrow(P\rightarrow R))$可写成$P\rightarrow(P\rightarrow R)$.

命题演算中只讨论合式公式,为方便起见,将合式公式就称作公式.

1.4 重 言 式

1.4.1 定义

命题公式中有一类重言式.如果一个公式,对于它的任一解释I下其真值都为真,就称为重言式(永真式).如$P\vee\neg P$是一个重言式.

显然由$\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$和\ 联结的重言式仍是重言式.

一个公式,如有某个解释I_0,在I_0下该公式真值为真,则称这公式是可满足的.如$P\vee Q$当取$I_0=(T,F)$即$P=T$,$Q=F$时便有$P\vee Q=T$,所以是可满足的.重言式当然是可满足的.

另一类公式是矛盾式(永假式或不可满足的).如果一个公式,对于它的任一解释I下真值都是假,便称是矛盾式.如$P\wedge\neg P$就是矛盾式.

不难看出这三类公式间有如下关系:

(1) 公式A永真,当且仅当$\neg A$永假.

(2) 公式A可满足,当且仅当$\neg A$非永真.

(3) 不是可满足的公式必永假.

(4) 不是永假的公式必可满足.

1.4.2 代入规则

A是一个公式,对A使用代入规则得公式B,若A是重言式,则B也是重言式.

为保证重言式经代入规则仍得到保持，要求:

(1) 公式中被代换的只能是命题变元(原子命题)，而不能是复合命题.

如可用$(R\wedge S)$来代换某公式中的P，记作$\frac{P}{(R\wedge S)}$，而不能反过来将公式中的$(R\wedge S)$以P代之.

这一要求可以代数的例子来说明,如对

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

可用$a=cd$代入,仍会保持等式成立.而若将$a+b$用cd代入,结果左端得$(cd)^2$,而右端无法代入cd,不能保持等式成立了.

(2) 对公式中某命题变项施以代入,必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式.

一般地说,公式A经代入规则可得任一公式，而仅当A是重言式时，代入后方得保持.如 $A=P\vee\neg P$,作代入$\frac{P}{\neg Q}$ 得 $B=\neg Q\vee\neg\neg Q$ 仍是重言式.若将$\neg P$以Q代之得$B=P\vee Q$(这不是代入，违反了规定(2))不是重言式了.

在第3章公理系统中,代入规则视作重要的推理规则经常使用.

可使用代入规则证明重言式.

例1 判断$(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$为重言式.

因$P\vee\neg P$为重言式，作代入$\frac{P}{(R\vee S)}$,便得$(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$.依据代入规则,这公式必是重言式.

例2 判断$((R\vee S)\wedge((R\vee S)\to(P\vee Q)))\to(P\vee Q)$为重言式.

不难验证$(A\wedge(A\to B))\to B$是重言式,作代入$\frac{A}{(R\vee S)}$，$\frac{B}{(P\vee Q)}$,便知

$$((R\vee S)\wedge((R\vee S)\to(P\vee Q)))\to(P\vee Q)$$

是重言式.

第 2 章　命题逻辑的等值和推理演算

推理形式和推理演算是数理逻辑研究的基本内容, 自然介绍了基本概念后就需进行讨论了. 命题的等值演算也可看作是推理演算. 推理形式是由前提和结论经蕴涵词联结而成的, 推理过程是从前提出发, 根据所规定的规则来推导出结论, 我们讨论的是前提真结论必然真的演绎推理.

重言式是重要的逻辑规律, 正确的推理形式, 等值式都是重言式. 所以对重言式的讨论和对推理的讨论实质上是相同的.

这章对命题等值和推理演算的讨论, 是以语义的观点进行的非形式的描述, 目的是直观容易理解, 也便于实际问题的逻辑描述和推理. 而严格的形式化的讨论在第 3 章所建立的公理系统.

在数字电路和计算机硬件的设计等领域, 命题演算获得了卓有成效的应用.

这章的前 6 节讨论等值演算, 后 4 节讨论推理演算.

2.1　等 值 定 理

若把初等数学里的 $+$, $-$, $\times$, $\div$ 等运算符看作是数与数之间的联结词, 那么由这些联结词所表达的代数式之间, 可建立如下许多等值式:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

……

在命题逻辑里也同样可建立一些重要的等值式.

2.1.1　等值的定义

给定两个命题公式 A 和 B, 而 $P_1, \cdots, P_n$ 是出现于 A 和 B 中的所有命题变项, 那么公式 A 和 B 共有 2^n 个解释, 若在其中的任一解释下, 公式 A 和 B 的真值都相等, 就称 A 和 B 是等值的(或称等价). 记作 $A = B$ 或 A　B.

显然, 根据真值表就可以判明任何两个公式是否等值.

例 1　证明 $(P \wedge \neg P) \vee Q = Q$.

证明　画出 $(P \wedge \neg P) \vee Q$ 与 Q 的真值表可看出, 等式是成立的. 见图 2.1.1.

例 2　证明 $P \vee \neg P = Q \vee \neg Q$.

证明　画出 $P \vee \neg P$, $Q \vee \neg Q$ 的真值表, 可看出它们是等值的, 而且它们都是重言式.

从例 1、例 2 还可说明, 两个公式等值并不要求它们一定含有相同的命题变项. 若仅在等式一端的公式里有变项 P 出现, 那么等式两端的公式其真值均与 P 无关. 例 1 中公式

$(P\vee\neg P)\vee Q$ 与 Q 的真值都同 P 无关，例 2 中 $P\vee\neg P$，$Q\vee\neg Q$ 都是重言式，它们的真值也都与 P，Q 无关. 再有对例 1 和例 2 来说，公式的解释都是针对 P 和 Q 的设定，如$\{P, Q\} = \{T, F\}$. 这表示 $P = T$，$Q = F$.

P	Q	$P\wedge\neg P$	$(P\wedge\neg P)\vee Q$
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	F
T	T	F	T

图 2.1.1

2.1.2 等值定理

定理 2.1.1 对公式 A 和 B，$A = B$ 的充分必要条件是 $A\leftrightarrow B$ 是重言式.

若 $A\leftrightarrow B$ 为重言式（A，B 必不会都是简单命题，而是由简单命题 $P_1, \cdots, P_n$ 构成的，对 A，B 的一个解释，指的是对 $P_1, \cdots, P_n$ 的一组具体的真值设定），则在任一解释下，A 和 B 都只能有相同的真值，这就是定理的意思.

证明是容易的. 若 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，即在任一解释下，$A\leftrightarrow B$ 的真值都为 T. 依 $A\leftrightarrow B$ 的定义只有在 A，B 有相同的值时，才有 $A\leftrightarrow B = T$. 于是在任一解释下，A 和 B 都有相同的真值，从而有 $A = B$. 反过来，若有 $A = B$，即在任一解释下 A 和 B 都有相同的真值，依 $A\leftrightarrow B$ 的定义，$A\leftrightarrow B$ 只有为真，从而 $A\leftrightarrow B$ 是重言式.

有了这个等值定理，证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式.

不要将“$=$”视作联结词，在合式公式定义里没有“$=$”出现. 我们是将 $A = B$ 看成是表示公式 A 与 B 的一种关系. 这种关系具有 3 个性质:

(1) 自反性 $A = A$.

(2) 对称性 若 $A = B$，则 $B = A$.

(3) 传递性 若 $A = B$，$B = C$，则 $A = C$.

这 3 条性质体现了“$=$”的实质含义.

2.2 等值公式

2.2.1 基本的等值公式（命题定律）

(1) 双重否定律

$\neg\neg P = P$.

(2) 结合律

$(P\vee Q)\vee R = P\vee(Q\vee R)$.

$(P\wedge Q)\wedge R = P\wedge(Q\wedge R)$.

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R = P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$.

$(P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$.

(3) **交换律**

$P \vee Q = Q \vee P$.

$P \wedge Q = Q \wedge P$.

$P \setminus Q = Q \setminus P$.

$P \to Q \neq Q \to P$.

(4) **分配律**

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$.

$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$.

(5) **等幂律(恒等律)**

$P \vee P = P$.

$P \wedge P = P$.

$P \to P = T$.

$P \setminus P = T$.

(6) **吸收律**

$P \vee (P \wedge Q) = P$.

$P \wedge (P \vee Q) = P$.

(7) **摩根律**

$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$.

$\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$.

对蕴涵词、双条件词作否定有

$\neg (P \to Q) = P \wedge \neg Q$.

$\neg (P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(8) **同一律**

$P \vee F = P$.

$P \wedge T = P$.

$T \to P = P$.

$T \leftrightarrow P = P$.

还有

$P \to F = \neg P$.

$F \leftrightarrow P = \neg P$.

(9) **零律**

$P \vee T = T$.

$P \wedge F = F$.

还有

$P \to T = T$.

$F \to P = T$.

(10) 补余律

$$P \vee \neg P = T.$$

$$P \wedge \neg P = F.$$

还有

$$P \to \neg P = \neg P.$$

$$\neg P \to P = P.$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F.$$

所有这些公式,都可使用直值表加以验证.若使用文氏(Venn)图(参见 9.4.1 节)也容易理解这些等值式,这种图是将 P, Q 理解为某总体论域上的子集合,而规定 $P \wedge Q$ 为两集合的公共部分(交集合), $P \vee Q$ 为两集合的全部(并集合), $\neg P$ 为总体论域(如矩形域)中 P 的余集,关于集合论的内容详见第 9 章.如图 2.2.1 所示.

图 2.2.1

从文氏图看公式 6 就很容易了,因 $P \wedge Q$ 较 P 来得“小”, $P \vee Q$ 较 P 来得“大”,从而有

$$P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P.$$

若将 $\vee$, $\wedge$ 分别以 $+$ 和 $\cdot$ 来表示,于是

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

化成 $P + Q \cdot R = (P + Q) \cdot (P + R)$.

$$P \vee P = P$$

化成 $P + P = P$.

$$P \wedge P = P$$

化成 $P \cdot P = P$.

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

化成 $P + P \cdot Q = P$.

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

化成 $P \cdot (P + Q) = P$.

这些以 $+$ $\cdot$ 表示的等式,在实数域里明显地不成立,这就提醒我们,与、或的逻辑运算同数的 $+$, $\cdot$ 运算是有区别的.

对这些等式使用自然用语加以说明,将有助于理解.如 P 表示张三是学生, Q 表示李四是工人,那么 $\neg(P \vee Q)$ 就表示并非“张三是学生或者李四是工人”.这相当于说,“张三不是学生而且李四也不是工人”,即可由 $\neg P \wedge \neg Q$ 表示,从而有 $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$.

2.2.2 常用的等值公式

由于人们对 $\neg$、$\vee$、$\wedge$ 更为熟悉,常将含有 $\to$ 和 \ 的公式化成仅含有 $\neg$、$\vee$、$\wedge$ 的公式.这

也是证明和理解含有→, \ 的公式的一般方法.

下面将要介绍的公式 11～18 是等值演算中经常使用的, 也该掌握它们, 特别是能直观地解释它们的成立.

(11) $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$.

通常对 $P \rightarrow Q$ 进行运算时, 不如用 $\neg P \vee Q$ 来得方便. 而且以 $\neg P \vee Q$ 表示 $P \rightarrow Q$ 帮助我们理解"如果 P 则 Q"的逻辑含义. 问题是这种表示也有缺点, 丢失了 P, Q 间的因果关系.

(12) $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$.

如将 $P \rightarrow Q$ 视为正定理, 那么 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 就是相应的逆否定理, 它们必然同时为真, 同时为假, 所以是等值的.

(13) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$.

P 是 $(Q \rightarrow R)$ 的前提, Q 是 R 的前提, 于是可将两个前提的合取 $P \wedge Q$ 作为总的前提. 即如果 P 则如果 Q 则 R, 等价于如果 P 与 Q 则 R.

(14) $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

这可解释为 $P \leftrightarrow Q$ 为真, 有两种可能的情形, 即 $(P \wedge Q)$ 为真或 $(\neg P \wedge \neg Q)$ 为真. 而 $P \wedge Q$ 为真, 必是在 $P = Q = T$ 的情况下出现, $\neg P \wedge \neg Q$ 为真, 必是在 $P = Q = F$ 的情况下出现. 从而可说, $P \leftrightarrow Q$ 为真, 是在 P, Q 同时为真或同时为假时成立. 这就是从取真来描述这等式.

(15) $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$.

这可解释为 $P \leftrightarrow Q$ 为假, 有两种可能的情形, 即 $(P \vee \neg Q)$ 为假或 $(\neg P \vee Q)$ 为假, 而 $P \vee \neg Q$ 为假, 必是在 $P = F$, $Q = T$ 的情况下出现, $\neg P \vee Q$ 为假, 必是在 $P = T$, $Q = F$ 的情况下出现. 从而可说 $P \leftrightarrow Q$ 为假, 是在 P 真 Q 假或 P 假 Q 真时成立. 这就是从取假来描述这等式.

(16) $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

这表明 $P \leftrightarrow Q$ 成立, 等价于正定理 $P \rightarrow Q$ 和逆定理 $Q \rightarrow P$ 都成立.

(17) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

前提条件 P, Q 可交换次序.

(18) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$.

左端说明的是由 P 而且由 Q 都有 R 成立. 从而可以说由 P 或 Q 就有 R 成立, 这就是等式右端.

2.2.3 置换规则

对公式 A 的子公式, 用与之等值的公式代换称为置换.

置换规则　公式 A 的子公式置换后, A 化为公式 B, 必有 $A = B$.

当 A 是重言式时, 置换后的公式 B 必也是重言式.

置换与代入是有区别的. 置换只要求 A 的某一子公式作代换, 不必对所有同一的子公式都作代换.

在等值演算过程中, 常无意识的使用了置换规则. 这里只不过是对置换规则给予明确说明.

2.2.4 等值演算举例

例 1 **证明** $(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee(Q\wedge R)\vee(P\wedge R)=R$.

证明

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= (\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\vee P)\wedge R) && \text{(分配律)}\\
&= ((\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R) && \text{(结合律)}\\
&= (\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R) && \text{(摩根律)}\\
&= (\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R && \text{(分配律)}\\
&= (\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q))\wedge R && \text{(交换律)}\\
&= T\wedge R && \text{(置　换)}\\
&= R && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

例 2 **试证** $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)=T$.

证明

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= ((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R)) && \text{(摩根律)}\\
&= ((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R)) && \text{(分配律)}\\
&= ((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R)) && \text{(等幂律)}\\
&= T. && \text{(置　换)}
\end{aligned}
$$

从例中可看出, 一个命题公式的表示形式并不是唯一的, 可以有多种不同的表达式, 通过等值演算可以寻求出最简单的逻辑表达式. 在数字电路中, 当电路的功能明确后, 如何寻求简单而又可靠的电子线路, 等值演算为此提供了有力的手段.