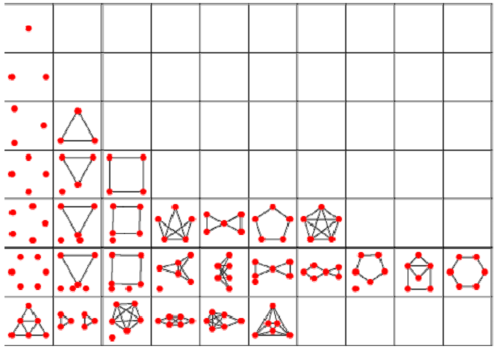


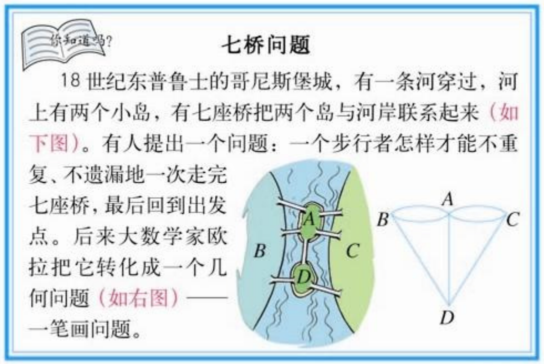
欧拉图与哈密顿图

Euler and Hamilton Graph

高晓沨（Xiaofeng Gao）

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

目录



七桥问题

18 世纪东普鲁士的哥尼斯堡城，有一条河穿过，河上有两个小岛，有七座桥把两个岛与河岸联系起来（如下图）。有人提出一个问题：一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最后回到出发点。后来大数学家欧拉把它转化成一个几何问题（如右图）——一笔画问题。

欧拉道路与欧拉回路

Euler Path and Euler Circuit

欧拉回路

- 【定义】给定无向连通图G=(V, E)，包含图G的所有边的简单道路称为**欧拉道路**(或**欧拉通道**、**欧拉迹**)，
- 包含图G的所有边的简单回路称为**欧拉回路**(或**欧拉闭迹**)。
- 假设G没有孤立点，若G含有**欧拉回路**，则称G是**欧拉图**。

欧拉图定理

- 【定理】图G是欧拉图的充要条件是G连通且没有奇点。

- 【证】必要性 ：

若G中有欧拉回路C,则C过每一条边有且仅有一次。对任一节点v,如果C由e_i进入v, 则一定通过另一条边e_j从v离开。因此v的度是偶数。

证明(2)

- 充分性 ： 由于G是有穷图，因此可断定从G的任一节点v_0出发一定存在G的一条简单回路C。这是因为各节点的度都是偶数，所以这条简单回路不可能停留在v_0以外的某个节点，而不能再向前伸延以构成闭通道C。

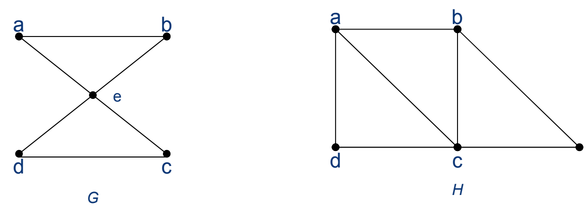
- 如果E=C, 则C就是欧拉回路，充分性得证。否则在G中删去C的各边，得到G_1=G－C。

证明(3)

- G_1可能是非连通图，每个顶点的度保持为偶数。这时，G_1中一定存在某个度非零的节点v_i，同时也是C中顶点。否则C的顶点与G_1的顶点之间无边相连，与G是连通图矛盾。同理，从v_i出发，G_1中所在的连通分量内存在一条简单回路C_1。C ∪ C_1仍然是G的一条简单回路，但它包括的边数比C多。继续构造，最终有C'=C ∪ C_1 ∪… ∪ C_k是一条欧拉回路。

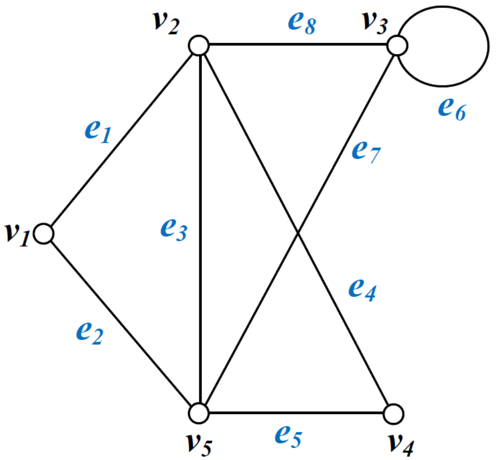
范例

【例】 判断下图是否欧拉图：



范例(2)

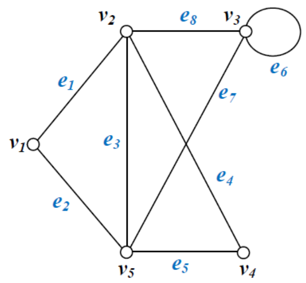
❖ 【例】试找出下图的一条欧拉回路。

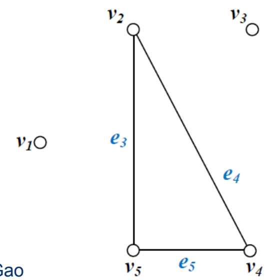


解

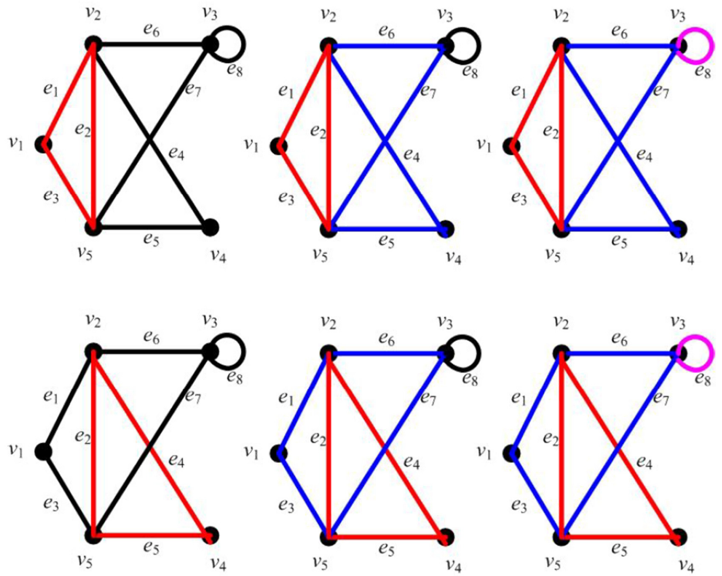
❖ 【解】从任一点出发，比如v_1开始，可构造简单回路$C=(e_1,e_8,e_6,e_7,e_2)$。

❖ $G_1=G-C$中的v_2、v_5度非零且是C中的节点。从v_2开始G_1中有简单回路$C_1=(e_3,e_5,e_4)$，因此$C \cup C_1=(e_1,e_3,e_5,e_4,e_8,e_6,e_7,e_2)$包含了G的所有边，是G的欧拉回路。





其他解法



有向连通图的欧拉回路

❖ 【推论】若有向连通图G中各节点的正负度相等,则G中存在有向欧拉回路.

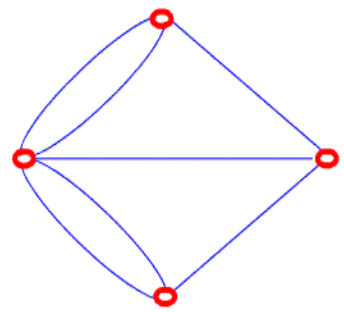
❖ 证明方法类似之前定理，由G是有穷图且每个节点正负度相等可以断定从G的任一节点v_0出发一定存在G的一条简单回路C。若C=E(G)，则得证。否则在G中删去C的各边，找到新的简单回路C_1，并添加至C中。重复该步骤直至C成为欧拉回路为止。

欧拉道路(欧拉迹)

- 【推论】若无向连通图G中只有2个度为奇数的顶点。则G中存在欧拉道路。
- 【证明】设v_i和v_j是两个奇点，做$G'=G+(v_i,v_j)$。则G’中各顶点的度都是偶数。由之前定理知，G’有欧拉回路，它包含(v_i,v_j)这条边。删去此边，即可得到一条从v_i到v_j的简单道路，它恰好经过了G的所有边，即是一条欧拉道路。
- 注：该推论实际是充分必要条件，即无向连通图G中存在欧拉道路当且仅当G中有零个或两个度为奇数的节点。

范例

- 【例】七桥问题既不存在欧拉回路也不存在欧拉道路.



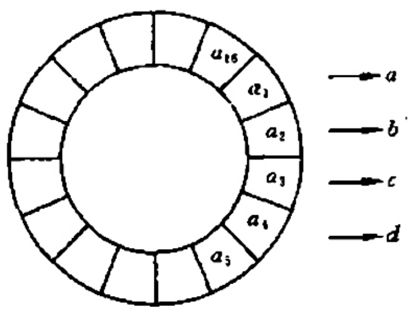
范例

- 【例】设连通图G=(V,E)有k个度为奇数的节点，证明E(G)可以划分为k/2条简单道路。

- 【证明】易知k是偶数。在这个k个节点间添加k/2条边，使得每个节点都与其中一条边关联，得到G’，易知G’中各节点的度都为偶数，故G’中有欧拉回路C，这k/2条边都在C上且不相邻接。故删去这些边，可以得到k/2条简单道路，它们包含了G的所有边，即E(G)划分成了k/2条简单道路。

编码盘范例

- 【例】一个编码盘分成16个相等的扇面，每个扇面分别由绝缘体和导体组成，可以表示0和1两种状态，其中a,b,c,d四个位置的扇面组成一组二进制输出。
- 试问这16个二进制数的序列应如何排列，编码盘才恰好能组成0000到1111的16组四位二进制输出，同时旋转一周后又返回到0000状态？

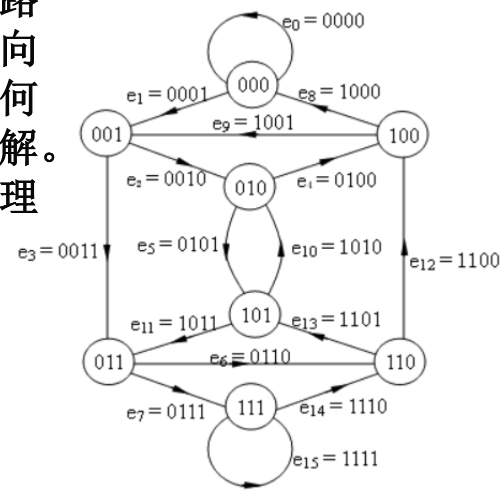


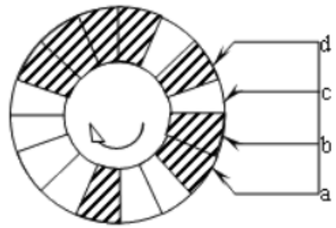
解法

❖【解】如果从状态$a_1a_2a_3a_4$(a_i=0或1)逆时针旋转一个扇面，那么新的输出是$a_2a_3a_4a_5$，其中有三位数字不变。因此可以用8个节点表示从000到111这8个二进制数。这样从节点(a_{i-1},a_i,a_{i+1})可以到达节点$(a_i,a_{i+1},0)$或$(a_i,a_{i+1},1)$，其输出分别是 $(a_{i-1},a_i,a_{i+1},0)$ 和$(a_{i-1},a_i,a_{i+1},1)$。用这样的方法可以得到如下图，它是有向连通图，共16条边，且每个节点的正、负度相等。

解法(续)

❖由有向图的欧拉回路推论，该图存在有向欧拉回路，其中任何一条都是原问题的解。如下图即是一个合理的方案。





一笔画问题

❖【定义】如果一个图可以从某个顶点出发，每条边恰好经过一次，最后终止在出发点或另一个顶点，则称该图可以一笔画。也就是说，可以一笔画的图含有欧拉道路，但不一定有欧拉回路。显然欧拉图一定可以一笔画成，反之则一般不然。

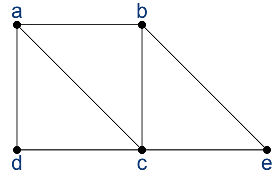
一笔画定理

❖【定理】一个图能一笔画成的充要条件是，G连通且奇顶点数为0或2。若奇点数为2，则从其中一个奇顶点出发，终止于另一个奇顶点上，完成一笔画。

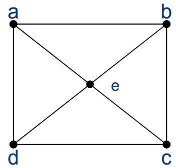
❖证明由欧拉回路定理或欧拉道路推论既得。

范例 (2)

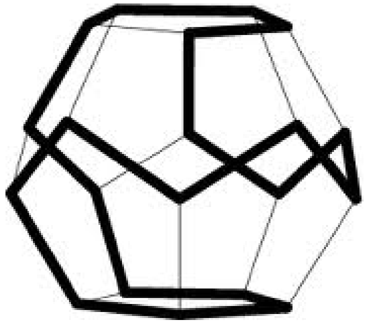
【例】 判断下图是否可以一笔画成:



G



H



哈密顿圈

Hamilton Circuit

哈密顿回路与道路

- 【定义】无向图G的一条经过全部节点的初级回路(道路)称为G的**哈密顿回路(道路).**
  - 简记为H回路(道路).
- 含有哈密顿圈的图称为**哈密顿图**，反之则称为**非哈密顿图**。
- 对H回路问题
  - 要求V(G) = $n \geq 3$
  - 只需考虑简单图,因为重边和自环不起作用
- **H回路的判定很困难,没有发现充分必要的条件,只有若干充分条件.**

H道路的判定

- 【定理】若简单图G的任意两节点v_i与v_j之间恒有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n-1$$

则G中存在H道路.

证明思路:

(1)由定理条件:G是连通图.

(2)令P是G中最长初级道路,则P是H道路.若不是:

(i) 由定理条件:必有经过P中节点的初级回路C.

(ii) 由连通性:C必可与C外某相邻节点构成比P更长的初级道路.

证明

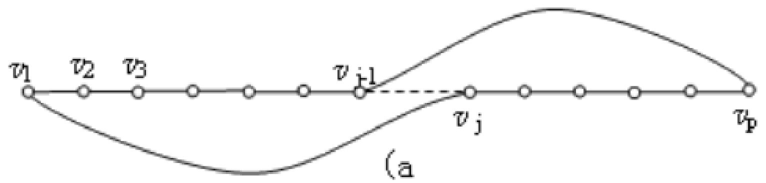
- 【连通性】我们首先证明G是连通图。若G有两个或更多个互不连通的连通分支，设一个连通分支中有n_1个节点，任取一个节点v_1。设另一个连通分支中有n_2个节点，任取一个节点v_2。
- 因为$d(v_1)\le n_1-1$，$d(v_2)\le n_2-1$，故$d(v_1)+d(v_2)\le n_1+n_2-2<n-1$，这与题设矛盾，故G必连通。

证明(续)

- 其次，我们从一条边出发构成一条路，证明它是H道路。
- 设在G中有含$p-1$条边的路，$p<n$，它的节点序列为$v_1, v_2, \dots, v_p$。如果有v_1或v_p邻接于不在这条路上的一个节点，我们可扩展这条路，使它包含这一个节点，从而得到p条边的路，否则，v_1和v_p都只邻接于这条路上的节点。
- 我们证明在这种情况下，存在一条回路包含节点$v_1, v_2, \dots, v_p$。

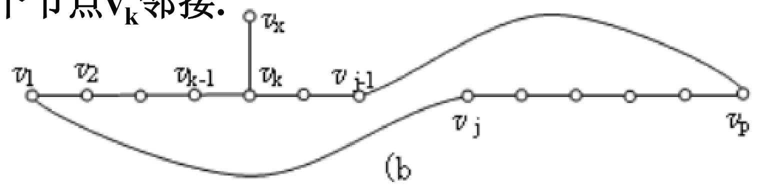
证明(续)

- 若v_1邻接于v_p，则$v_1, v_2, \dots, v_p, v_1$即为所求的回路。假设与$v_1$邻接的节点集是$\{v_l, v_m, \dots, v_t\}$(共k个)，这里$2\leqslant l, m, \dots, j, \dots, t\leqslant p-1$，如果$v_p$邻接于$v_{l-1}, v_{m-1}, \dots, v_{j-1}, \dots, v_{t-1}$中之一，譬如$v_{j-1}$，则$v_1\ v_2\ v_3 \dots v_{j-1}\ v_p\ v_{p-1} \dots v_j\ v_1$是所求的包含节点$v_1, v_2, \dots, v_p$的回路。



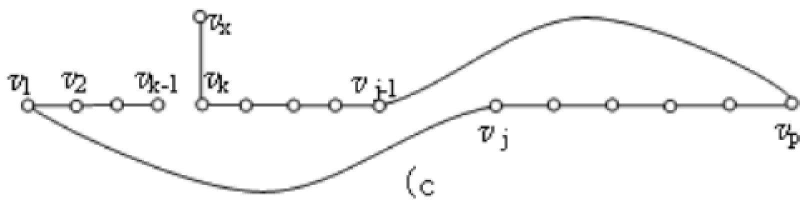
证明(续)

- 如果v_p不邻接于$v_{l-1}, v_{m-1}, \dots, v_{t-1}$中任一个，则$v_p$至多邻接$p-k-1$个节点，$d(v_p)\leqslant p-k-1$，$d(v_1)=k$，故$d(v_p)+d(v_1)\leqslant p-k-1+k=p-1<n-1$，即$v_1$与$v_p$度数之和至多为$n-2$，矛盾。
- 至此，我们有包含所有节点$v_1, v_2, \dots, v_p$的一条回路，因为G是连通的，所以在G中必有一个不属于该回路的节点v_x与$v_1, v_2, \dots, v_p$中的某一个节点v_k邻接.



证明(续)

- 于是就得到一条包含p条边的路 $(v_x,v_k,v_{k+1},\dots,v_{j-1},v_p,v_{p-1},\dots,v_j,\dots,v_1,v_2,\dots,v_{k-1})$。如下图所示，重复前述构造法，直到得到n-1条边的路。



H回路的判定

- 【定理】(Ore,1960) 若简单图G(n≥3)的任一对不相邻节点v_i与v_j都满足

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n$$

则G有H回路.

- 【证明】由H道路判定定理知，G有H道路。设其两端点是v_1和v_n，若G不存在H回路，一定有$d(v_1)+d(v_n)\leq n-1<n$，矛盾。

H回路的判定

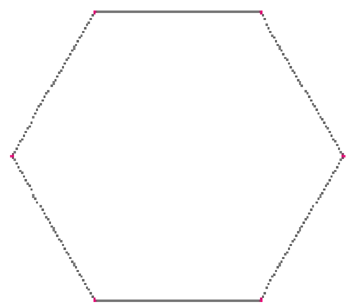
- 【定理】(Dirac,1952) 若简单图G(n≥3)的任一节点的度≥n/2,则G有H回路.

- 【证明】利用上述推理求证。

范例

- 【例】举例说明存在不满足哈密顿图判定的充分条件，但确实是哈密顿图。

- 【解】做正六边形A，A中所有顶点的度都为2，则任意两个顶点的度之和都是4，不满足哈密顿图判定的充分条件，但它显然是哈密顿图。

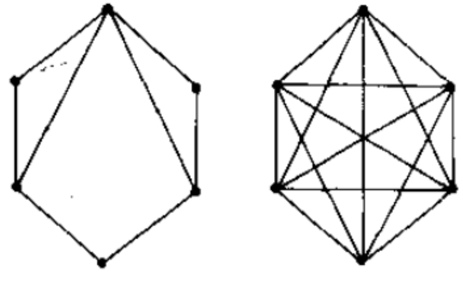


H回路的判定(闭合图引理1)

- 【引理】简单图G=(V,E)若有不相邻的节点 v_i, v_j满足$d(v_i) + d(v_j) \geq n$，则
  G有H回路 iff G+(v_i,v_j)有H回路.
- 【证明】必要性显然。下面证充分性。
- 假设G不存在H回路，则G+(v_i,v_j)的H回路一定经过边(v_i,v_j)，删去(v_i,v_j)，即G中存在一条以v_i, v_j为端点的H道路，这时又有$d(v_i)+d(v_j)<n$，与已知矛盾。

闭合图

- 【定义】若v_i和v_j是简单图G不相邻的节点，且满足$d(v_i) + d(v_j) \geq n$，则令G'=G+(v_i,v_j)。对G'不断加入这样的边(v_i,v_j),直至不再有满足条件的节点对,最终得到的图称为G的闭合图,记作C(G).
- 【例】右图(a)的闭合图是(b)



(a) (b)

闭合图引理2

- 【引理】简单图G的闭合图是唯一的.
- 【证明】设$C_1(G)$和$C_2(G)$是G的两个闭合图，$L_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_r\}$，$L_2=\{a_1,a_2,\ldots,a_s\}$分别是$C_1(G)$和$C_2(G)$中新加入边的集合，可以证明$L_1=L_2$，即$C_1(G)=C_2(G)$。
- 如若不然，不妨设$e_{i+1}=(u,v)\in L_1$是构造$C_1(G)$时第一条不属于L_2的边，即$e_{i+1}\notin C_2(G)$。令$H=G\cup\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$，这时H是$C_1(G)$也是$C_2(G)$的子图。由于构造$C_1(G)$时要加入$e_{i+1}$，显然H中满足$d(u)+d(v)\geq n$，但$(u, v)\notin C_2(G)$，与$C_2(G)$是G的闭合图矛盾。

闭合图定理

- 【定理】(Bondy&Chvátal, 1976)
  简单图G有H回路 iff C(G)有H回路.
- 【证明】设$C(G)=G\cup L_1$，$L_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}$，由之前两个引理知：

  G有H回路

  $\Leftrightarrow$G+e_1有H回路

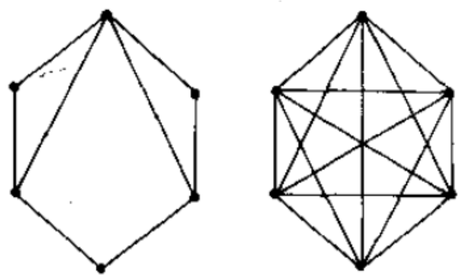
  $\Leftrightarrow\ldots$

  $\Leftrightarrow G\cup L_1$有H回路。

由于C(G)唯一，故定理成立。

闭合图推论

- 【推论】若$C(G)=K_n$,则G有H回路.
  - Ore定理和Dirac定理是这个推论的直接推论.
- 【例】右图(a)有H回路。
- 注：该推论说明完全图K_n必有H回路。



(a)　　(b)

连通分量定理

- 【定理】设G是哈密顿图，则对于G顶点集的任意子集S，在G中移除S中的顶点及所有与这些顶点相关联的边，所产生子图的连通分量数必不大于|S|。即$\forall S\subseteq V$, $p(G-S)\le|S|$, 其中$p(G-S)$为$G-S$的连通分支数。
- 【证明】设C是G中任意一条H回路，易知，当S中顶点在C上均不相邻时，$p(C-S)$达到最大值$|S|$，而当S中顶点在C上有彼此相邻现象时，均有$p(C-S)<|S|$，所以有$p(C-S)\le|S|$。而C是G的生成子图，所以有$p(G-S)\le p(C-S)\le|S|$。

推论

- 【推论】每个哈密尔顿图都没有割点。
- 【证明】设无向图G=(V,E)是H图，假设其存在割点，设为v_r，令$S=\{v_r\}$，则由割点定义知，$p(G-S)\geqslant 2>|S|$，与之前定理矛盾。
- 【推论】有奇数个顶点的二部图必定不是哈密顿图。

范例

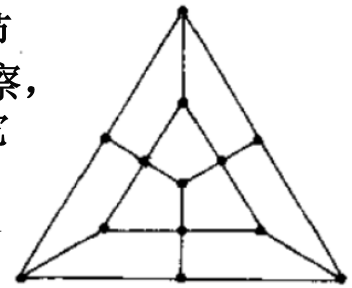
- 【例】设n(≥3)人中，任两个人合在一起都认识其余n-2个人。证明这n个人可以排成一队，使相邻者互相认识。
- 【解】用一个节点表示一个人，相互认识则用边连接相应的节点，于是得到简单图G。若G中有H道路，则问题可证。由已知条件，对任意两点$v_i, v_j\in V(G)$，都有$d(v_i)+d(v_j)\ge n-2$。此时若v_i, v_j认识，即$(v_i,v_j)\in E(G)$，则$d(v_i)+d(v_j)\ge n$；

范例(续)

- 若互相不认识，必存在$v_k \in V(G)$，满足$(v_i, v_k) \in E(G)$，$(v_j,v_k)\in E(G)$。否则，设$(v_i, v_k) \notin E(G)$，就出现v_k,v_j合在一起不认识v_i，与原题设矛盾。
- 因此也有$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$。由H路判定定理得，G中存在H道路。

H回路范例

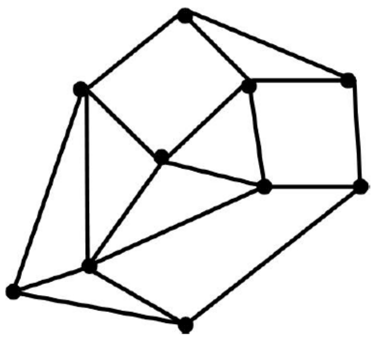
- 【例】证明下图中没有H回路。
- 【解】H回路是经过每个节点一次的初级回路。经观察，如果给某个节点标记A，它的邻接点标记B，B的邻接点标记A，则可顺利标完G中的节点。



- 若G中有H回路，该回路一定是沿着ABAB…AB走完全部节点，即标A与标B的节点数相同。但|V(G)|是奇数，矛盾。

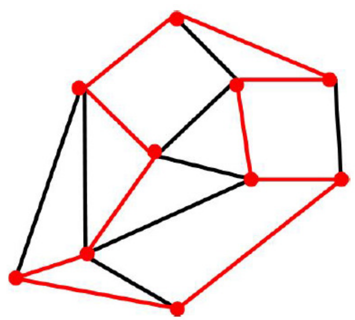
地图染色

- 【例】地图不存在相交的边界。如果一个地图中有H回路，则可用4种不同颜色对它们的域进行着色，使相邻的域染不同颜色。
- 【证明】两个不同的域相邻，则共同边界为一条边；
- 三个或三个以上不同域相邻，则共同边界为一个点；



解

- 设H是图G中的一条H回路，则H将G的域划分成了内域和外域两个部分。内域和外域均用两种不同的颜色染色，则四种颜色即可。



- 如果内域和外域不能用两种颜色着色，则必然出现三个或三个以上的域相邻的情况。这时，该内域（外域）中定有一个域相交的点。这与H回路相悖。

Thank You !

Xiaofeng Gao